

波長板のリップルについて その2

池田 優二

2000年9月13日

1 はじめに

昨年秋の実験によって、従来よく用いられてきた無色波長板¹を高分散偏光観測に用いるには問題があることが明らかになった。透過した光は硝材と接着材との界面での多重反射が起こすファブリペロー干渉によって、「リップル」と呼ばれる準周期的なスペクトルパターンが生じる。「リップル」はいくつかの周期が重なったものであるため、うなりを生じ、非常に複雑なパターンを作り、キャリブレーションを困難にするのである。また、その周期が分解能に近い事も問題であった。

無色波長板を構成するには異なるリターダンスの硝材を組み合わさなければならないので、ファブリペロー干渉を無くす事は不可能である。したがって我々は、うなりを軽減する(リップルのパターンを簡素化する)ことに方向性を求めた。接着材の屈折率をどちらか一方の硝材の屈折率に近づければ、その硝材と接着材間の界面での反射が無視できる程に小さくなるため、ある周期が消え、リップルのパターンがキャリブレーション可能なものにまで簡素化されるのではないかと考えたのである。

今回、 SiO_2 に近い屈折率をもつ接着材を選択し、波長板のサンプルを製作した。そのサンプルの透過率を測定したので、その結果について報告する。先に結果のみを述べると、我々が予想したものとは異なるものであった。そこで、さらに考察を進めモデルによる実験結果の再現を試みたので、その結果についても報告する。

そして最後に、高波長分解能偏光分光観測に有用な無色波長板の構成についての提案を行う。

2 実験

2.1 試料

今回は二種類の試料を用意した。一つ目(=試料A)は、 SiO_2 板と MgF_2 板を接着材9408($n = 1.465$)で貼り合わせたもの、もう一つ(=試料B)は同じ硝材を接着材C2062($n = 1.519$)で貼り合わせたものである。硝材板の厚みはそれぞれ、 $t_{\text{SiO}} = 291.2 \mu\text{m}$ 、 $t_{\text{MgF}} = 246.2 \mu\text{m}$ である(公差は $0.1 \mu\text{m}$ 以下)。接着材の厚みはおおよそ $5 \mu\text{m}$ である。

¹ SiO_2 と MgF_2 をそれぞれ3枚用いた6枚構成から成る(図1)。

2.2 測定

透過率測定の実験は、サンプルを製作した(株) 応用光電で行ってもらった。波長は、 $1.535\mu\text{m}$ - $1.545\mu\text{m}$ でビーム径は 0.5 mm であった。

測定結果を図 2 に示す。明らかにリップルと見られる周期パターンが得られている。

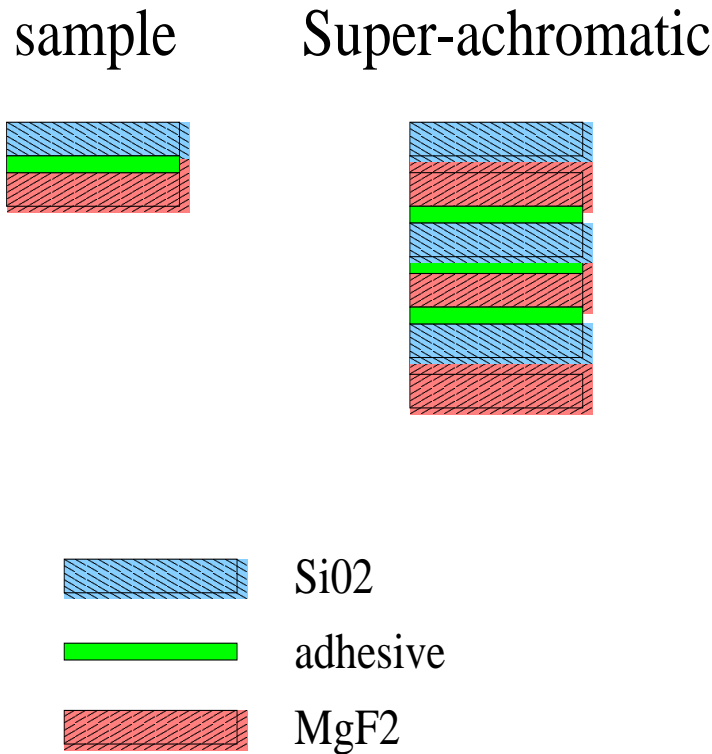


図 1: サンプル波長板の構成 (右)。左は無色波長板の構成。

2.3 解析結果

2.3.1 周期

2通りの測定結果について、リップルの周期を抽出した。測定波長と硝材の厚み、そして硝材の屈折率が既知であるので、それらの周期 ($\Delta\lambda$) は以下の式によって予想可能である。

$$\Delta\lambda = \lambda^2 / 2n_{\text{SiO}_2} t_{\text{SiO}_2} \quad \text{SiO}_2 \text{ 板が作るファブリペロー干渉} \quad (1)$$

$$\Delta\lambda = \lambda^2 / 2n_{\text{MgF}_2} t_{\text{MgF}_2} \quad \text{MgF}_2 \text{ 板が作るファブリペロー干渉} \quad (2)$$

したがって、予想値と実験値との比較をすることは、我々の予想の妥当性を確認する上で非常に有効な手段である。

周期解析には、PDM 法 (Stellingwerf 1978) を用いた。得られた周期と予想周期を表 1 に記す。資料 A から得られた、 28.8 \AA という周期は、 SiO_2 板起源のものであると考えれば、1% の危険率で一致していた。しかしながら、資料 A および資料 B の両方から 15 \AA 程度のこれまでのモデルからは全く予想できない周期が存在していることが分かった。

	予想値 (SiO ₂ 起源)	予想値 (MgF ₂ 起源)	測定値
資料 A	26.6 Å	35.0 Å	28.8 Å, 15.3 Å
資料 B	26.6 Å	35.0 Å	14.8 Å

表 1: PDM 法により得られた周期と、予想される周期。

	予想値	測定値
資料 A	0.0112	0.0145 ± 0.004
資料 B	0.0158	0.0345 ± 0.007

表 2: 実験により得られたコントラストと予想されるコントラスト。

2.3.2 コントラスト

次にリップルパターンのコントラスト (= C) を測定した。コントラストとは以下によって定義される量である。

$$C = (T_{\max} - T_{\min}) / (T_{\max} + T_{\min}) \quad (3)$$

結果を表 2 として示す。

資料 A, B ともに予想値と一致しているとは言いがたい。

実験結果として得られたものは、前回提案した一枚板によるファブリペローモデルでは説明できないものであった。このままでは、我々の目的に最適な波長板の提案はできない。周期のように一部実験と予想が一致する結果もあることから、これまでの考えが全くもって検討はずれであったことは考えにくい。次章ではこれまでのモデルの仮定を洗いなおし、もう少し厳密に考察をすることによって実験結果を再現するモデルの構築を試みることにする。

3 リップルの改訂モデル

3.1 板が複数層からなる場合のファブリペロー干渉

これまでのモデルは、一枚板でのファブリペロー干渉 (Appendix A を参照) のみを考えていた。数枚板で構成される場合は、それぞれから独立に生じるパターンが足し合わされたものが結果として得られるだろうとしていたのである。しかしながら、干渉は一層の上下界面だけでなく異なった層の面間でも起こり得る。空気中にある n 枚の層からなる板の透過率 T_n は以下の数列で表現される (Appendix B 参照)。

$$T_n = 1 - R_n \quad (4)$$

$$R_n = \frac{A_n^2 + B_n^2}{C_n^2} \quad (5)$$

$$A_n = r_n(1 + R_{n-1}^2) - R_{n-1}(1 + r_n^2) \cos(\epsilon_n - \phi_{n-1}) \quad (6)$$

$$B_n = R_{n-1}(1 - r_n^2) \sin(\epsilon_n - \phi_{n-1}) \quad (7)$$

$$C_n = 1 + r_n^2 R_{n-1}^2 - 2r_n R_{n-1} \cos(\epsilon_n - \phi_{n-1}) \quad (8)$$

ここで、 r_n 、 ϵ_n は $n+1$ 番目から n 番目の層へ入射する際の反射係数 (振幅反射率) と n 番目の層内で生じる位相差、 R_n と ϕ_n は 1 から n 番目の層を一枚の層であると見なした時の有効反射係数の実数部と有効位相差である。

今、試料が SiO_2 と MgF_2 、そして両者を貼つける接着材の 3 層構造で成っているとす。それぞれの厚みは、測定されたものを用いる。ただし、接着材の厚みは正しく測定されていないので、ここでは $5 \mu\text{m}$ とした。硝材の屈折率は、Bass et al.(1995) を参照した。接着材の屈折率は、応用光電が公表した値 (9804: $n = 1.45$, c2063: $n = 1.519 @ 1.54 \mu\text{m}$) を用いた。

以上の条件のもと、式 (4)-(8) を計算した結果が図 3,4 である。一枚層のモデルからは得られなかった 15 \AA 程度の短い周期が現れており、接着材 C2063 の測定結果に類似したリップルが得られているのが分かる。これは、 SiO_2 層の上面と MgF_2 の下面での多重反射により生じたパターンである。確かに多層膜のモデルによって C2063 の実験結果がうまく説明できそうなことは分かったが、これまで一枚層モデルでよく説明されていた接着材 9804 の結果とはかけはなれた結果となってしまった。しかし、さらに「層の面精度」と考慮に入れることで両方の実験結果をうまく説明できることが分かった。

3.2 面精度

これまでのモデルでは、波長板を成すそれぞれの層は完全にフラットな平面であると考えてきたが、実際には工作精度の問題でそうした理想的な平面を実現できるはずもなく、ある程度の凸凹を持っている。それらは、「面精度」と定義され、通常 $\lambda/10$ などのように波長単位で表現される。

層の表面が完全にフラットになっていないというのは、すなわち異なる同士を通過する光に対して、層の厚みが異なるということである。層の厚みが異なった場所を通過した光は、もはや互いにコヒーレントでなくなり、結果として得られる全エネルギーはそれぞれのエネルギーの単なる足し合わせになる。つまり、層の厚みが微妙に異なることによって形状の異なる無限に多くの干渉パターンが重なったものが結果として得られるという訳である²。面精度の非常に悪ければ、干渉パターンさえ見えなくなってしまうことが予想される。

面精度をモデルに反映させるために、「層の厚みは平均値 t_n 、標準偏差 N/λ を持ったガウス分布である」と仮定した。ガウス分布を持つ層に対して、モンテカルロ法によるシミュレーションを行った。一回の計算に用いた全光子数は、10000(1% の精度) である。

まず、「面精度が実際にリップルパターンに影響し得るのか」というのを確かめるために、 MgF_2 の両面の面精度のみをパラメータとして、パターンがどのように変化していくかを調べた (図 5)。このとき、 SiO_2 については理想的なフラット面としている。面精度を $\lambda/32$ から $\lambda/2$ まで変化させたが、明らかにパターンが変化しているのが分かる。面精度が良い時 ($\lambda/32, \lambda/16$) は、 SiO_2 面と MgF_2 面で作られる干渉パターンが見えているが、面精度が悪くなると ($\lambda/32, \lambda/16$) MgF_2 面が関わる干渉パターンは消え、 SiO_2 面内による干渉パターンのみしか見えなくなっている。 MgF_2 面での干渉パターンは面精度 $\lambda/8$ 程度を境として見えなくなっている (図 6)。

²いわゆる、「半コヒーレントの仮定」と呼ばれるものである。

やはり、面精度は干渉パターンを作るか否かに大きく依存しているようである。以上より、今回の実験結果に対して「接着材 9804 を用いた方は、C2036 を用いた方より SiO_2 もしくは MgF_2 (あるいは両方) の面精度が劣っていたためにパターンの違いが現れた」という仮説が立てられる。9804 を用いた場合には、 SiO_2 起源と見られる干渉パターンのみが見られたことを考えると、 MgF_2 の面精度が劣っていたと考えるのが妥当であろう。 SiO_2 の面精度を $\lambda/20$ (公称値) とし、最も実験結果を再現する MgF_2 の面精度を求めると、9804 の場合で $\lambda/8$ 、C2063 の場合で $\lambda/3.5$ となった。また、これらは周期にしてもコントラストにしても、非常によく実験結果を再現していると言える。

3.3 面精度の違いはどうして生じるのか？

これまでの解析によって、半コヒーレントな仮定のもと、多層膜のファブリペロー干渉の理論を応用すれば、実験結果が説明できることが分かった。また、半コヒーレンス性を作っているのは面精度であろうことも分かった。では実際にこのような面精度の違いを作っている原因は何であろうか？

波長板を成す SiO_2 と MgF_2 層の面精度の公称値は $\lambda/20$ である。これは、研磨終了後の値である。今回用いた二種類のサンプルは研磨を行った同じ板を切り分けて、それぞれ別の接着材を用いて貼りつけただけなので、接着以前に面精度が既に異なっていたことは考えにくい。ということは、接着材が面精度を犯した可能性があるということになる。これは、あくまでも予想に過ぎないが、接着材の化学的な効果などによって、 MgF_2 面の面精度が劣化したのかもしれない。あるいは、接着剤が滑らかに硝材に接着しておらず、接着材によって面精度が決定していることも考えられる。

4 議論

4.1 面精度が測定精度に与える影響

これまでの議論より、無色波長板に生じるリップルは硝材界面でのファブリペロー干渉の結果であることが分かった。ここまでは、前回のレポートの結果と同じであるが、今回新たに分かった事は、リップルの生成には層の面精度が非常に効いて来ることである。面精度が良ければ良い程、干渉によるリップルが強く現れる。最適な無色波長板とはこの場合、リップルの生じないものを指すので、層の面精度の悪いものがよりよいというなんとも奇妙な結果になる。

では、面精度が悪ければ悪い程よいのであろうか？面精度があまりにも悪いと、波長板通過後の光線のリターダンスにバラツキが生じて、目的とする偏光測定精度が達成できなくなる恐れがある。ここでは、測定精度を維持するためにはどの程度の面精度まで許されるのかを考察してみたい。

リターダンスが τ の直線位相板と、方位角 $\phi = 0^\circ$ の直線偏光子 (ウォーラストンプリズムに対応) を通過した光の強度 I は以下の式で書ける。

$$I = \frac{1}{2} [I_0 + Q_0(G + H \cos(4\phi)) + U_0 H \sin(4\phi) - V_0 \sin \tau \sin(2\phi)] \quad (9)$$

$$G = \frac{1}{2}(1 + \cos \tau) \quad (10)$$

$$H = \frac{1}{2}(1 - \cos \tau) \quad (11)$$

ここで、 (I_0, Q_0, U_0, V_0) は入射光のストークスパラメータである。 I は検出器に届く光子数で、測定量そのものと考えてよいので、検出器起源のものを除いた測定誤差は、

$$\sigma_I^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial I_0}\right)^2 \sigma_{I_0}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial Q_0}\right)^2 \sigma_{Q_0}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial U_0}\right)^2 \sigma_{U_0}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial V_0}\right)^2 \sigma_{V_0}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \tau}\right)^2 \sigma_\tau^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \phi}\right)^2 \sigma_\phi^2 \quad (12)$$

となる。波長板の面精度は、既に述べたように波長板の厚みのバラツキに焼きなおせる。また、厚みのバラツキはそのままリターダンスのバラツキ σ_τ となって現れるので、面精度がどれほど測定値の誤差効くかを見るには、上式の第5項を調べれば良い。

今、直線位相板として $1/2$ 波長板を考えているので、 $\tau = \pi + \delta\epsilon(\lambda)$ である。 $\delta\epsilon(\lambda)$ は波長の関数で、リターダンスの π からのずれを表し、無色波長板の場合は、 $\delta\epsilon < 3^\circ$ 、つまり微小量である。よって、第5項は以下のように変形される。

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} \simeq \frac{\delta\epsilon}{4} [Q_0(1 - \cos(4\phi)) - U \sin(4\phi)] \quad (13)$$

$\delta\epsilon$ が測定値に及ぼすシステムチックエラーは $(\delta\epsilon)^2 < P/800$ (Kawabata et al. 1999) 程度なので、少なくとも $\sigma_\tau < \delta\epsilon$ であれば、測定精度には影響を与えないことになる。6枚構成の無色波長板の (SiO_2 層と MgF_2 層から成る) 1コンポーネントのリターダンスは、 SiO_2 と MgF_2 のそれぞれの厚みを t_{SiO_2} 、 t_{MgF_2} 、常光線と異常光線の屈折率の差を Δn_{SiO_2} 、 Δn_{MgF_2} を用いて、

$$\tau_i(\lambda) = 2\pi/\lambda(\Delta n_{\text{SiO}_2} t_{\text{SiO}_2} - \Delta n_{\text{MgF}_2} t_{\text{MgF}_2}) \quad (14)$$

と書き表せる。括弧内のマイナスの符号は、 SiO_2 と MgF_2 の軸が互いに 90 度回転させて貼り付けられていることによる。1コンポーネントのリターダンスの偶然誤差 σ_{τ_i} が、面精度(それぞれ、 λ/x_{SiO_2} 、 λ/x_{MgF_2} とする)による厚みのバラツキによって生まれるものであるとすると、

$$\sigma_{\tau_i}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\Delta n_{\text{SiO}_2}^2 \sigma_{t_{\text{SiO}_2}}^2 + \Delta n_{\text{MgF}_2}^2 \sigma_{t_{\text{MgF}_2}}^2\right) \quad (15)$$

$$= (2\pi)^2 \left((2/x_{\text{SiO}_2})^2 \Delta n_{\text{SiO}_2}^2 + (2/x_{\text{MgF}_2})^2 \Delta n_{\text{MgF}_2}^2\right) \quad (16)$$

となる。また波長板全体(3コンポーネント合わせた)リターダンスの誤差は、

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_1} + \sigma_{\tau_2} + \sigma_{\tau_3} \quad (17)$$

$$\simeq 3\sigma_{\tau_1} \quad (18)$$

と書ける。 $\Delta n_{\text{SiO}_2} = 0.009$ 、 $\Delta n_{\text{MgF}_2} = 0.012$ 、 $x = x_{\text{SiO}_2} = x_{\text{MgF}_2}$ として $\delta\epsilon = 3\text{deg.} > \sigma_\tau$ となる x を求めると、

$$x > 1.43 \quad (19)$$

が得られる。 $\lambda/2$ より良好な面精度であれば、偏光測定精度に影響を与える事はないことになる。

4.2 AR コートの効果について

空気中にある屈折率 n の硝材に光線が入射する場合、表面反射によって $R = (n-1)^2/(n+1)^2$ だけエネルギーロスが生じる。一般的には、波長の数分の一程度の厚みの薄膜 (AR コート) を貼ることによって、反射によるエネルギーロスを軽減する。ある波長で屈折率 $n(\lambda)$ の硝材の表面反射を 0 にするには、厚み $\lambda/4/\sqrt{n(\lambda)}$ 、または $\lambda/2/\sqrt{n(\lambda)}$ の薄膜を表面に貼り付ければ良い。どちらを選ぶかは、空気面とは反対側の硝材屈折率が $n(\lambda)$ より大きい小さいかによって決まる。原理は、これまで述べて来た多層膜の透過率の理論と全く同じである。

無色波長板に AR コートを貼るにあたって、一般の AR コートを選ぶ場合と異なり、気を付けなければならない点がある。一般の場合は、表面の硝材の屈折率さえ分かれば、仕様に応じて最適な AR コートを選べばよいが、無色波長板の場合には既に述べたように波長板を構成する層間や層同士、さらには AR コートとの間で干渉が生じるため、干渉に寄与するであろうすべての層の厚みと屈折率を考慮した上で、最適なコート材質とその厚みを決定しなければならない。下手なコーティングはかえって透過率を下げることにもなり兼ねない。図 8 に、 $n = 1.2$ の膜をある厚みで貼りつけた時のモデルによって予想される透過率を示している。単層の MgF_2 に対して最も透過率が高くなるはずの $\epsilon = 0.25\lambda$ ($\lambda = 550$ nm) のコートをした場合が、図の黒線である。青線は 6 枚構成の無色波長板の MgF_2 面に $\epsilon = 0.25\lambda$ のコーティングを、 SiO_2 面に $\epsilon = 0.5\lambda$ のコーティングを施した場合であるが、全体的にはやや透過率は劣るものの、ピークでは単層にコートした場合にほぼ近い値が得られている。両面において ϵ の値を 0λ から 1λ の範囲で変化させてピーク透過率の変化を見たが、 $\epsilon = 0.25\lambda$ or 0.75λ の時が最大透過率を示した。したがって、AR コートについては理想とされる $\epsilon = 0.25\lambda$ のもので十分であろう。とはいえ、実際のコーティングにはさらに色消しのことも考慮せねばならず、さらには今問題として取り上げている面精度のこともあるので、AR コートをする際には幾分の注意が必要である。

5 結論

これまで、我々のものを含めていくつかの報告例があった波長板の透過光に生じるリップルについて以下のことを明らかにした。

- リップルの正体は、硝材と接着材界面で生じる多重反射光がつくる干渉パターンである。それらは、多層膜のファブリペロー干渉理論によって説明可能である。
- パターンは硝材の面精度によって、現れたり現れなかったりする。その境目となる面精度は片面に対して $\lambda/8$ 程度である。
- $\Delta P < 0.1\%$ の偏光測定精度を達成する目的には、リターダンスのバラツキという点から考えると、 $\lambda/2$ より良い面精度であれば十分使用に耐え得る。
- AR コートは、波長板の透過率を上げ、またリップルの振幅を軽減させるのに有効である。

以上より、高い波長分解偏光観測に最適な波長板は「面精度にして $1/4 - 1/2 \times \lambda$ 程度の硝材を組み合わせたもの」ということになる。今回使用したサンプルの中から選べば、接着材 9408 を用いたものがより適した波長板である。

最後に、接着材 9408 を用いた場合に予想されるリップルを図 9 に示しておく (AR コートなし)。

A ファブリペロー干渉

真空中 (屈折率 $n = 1.0$) から平行平板 (屈折率 n_p 、厚さ t) に垂直に光が入射する場合を考える。平行平板の裏は屈折率 n_0 の媒質で覆われているとする。真空から見た平板の界面での振幅反射率と振幅透過率をそれぞれ r_1 、 t_1 とし、同様に平板界面での振幅反射率と振幅透過率を r_2 、 t_2 とする。

界面から入射した光は、平行平板の上面と下面で反射を繰り返し、上面または下面から抜けていく。上面または下面で m 回反射した後に媒質へ侵入した (つまり、平板を透過した) 光 ($=\phi_m$) は、入射光の振幅を 1、位相を ϵ_0 とすると、以下のように書ける。

$$\phi_m = t_1 t_2 (r_1 r_2)^m e^{-(\epsilon_0 + \epsilon m)i} \quad (20)$$

ただし、 $\epsilon = 4\pi n_p t / \lambda$ で、上面と下面で一度ずつ反射した時の光路差によって生じる位相差である。

透過光は、これら ϕ_m をすべて足し合わせたものであるので、

$$\phi = \sum_0^{\infty} \phi_m \quad (21)$$

$$= \frac{t_1 t_2 e^{-\epsilon_0 i}}{1 - r_1 r_2 e^{-\epsilon_0 i}} \quad (22)$$

であり、よってトータルの透過率 T は以下ようになる。

$$T = \phi \phi^* \quad (23)$$

$$= \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \epsilon} \quad (24)$$

上式 () は、位相差 ϵ に対して正弦関数の振舞を示す (図 10)。 ϵ は $1/\lambda$ に比例するので、透過率の波長依存性も正弦関数的なうねったものになる。これがファブリペロー干渉で、平行平板を重ね合わせた無色波長板の透過率にも同様の現象が (リップルとして) 観測される (レポート 1 を参照)。 $\epsilon = 4\pi n_p t / \lambda = (2j+1)\pi$ のとき透過率は最小になり、 $\epsilon = 4\pi n_p t / \lambda = 2j\pi$ のとき透過率は最大になる。よって、リップルのコントラスト C は、

$$C = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} \quad (25)$$

$$= \frac{2r_1 r_2}{1 + r_1^2 r_2^2} \quad (26)$$

となる。

B 多層膜の透過率

今、空気中にそれぞれ屈折率の異なる n 個の層から成る膜があるとする。光線透過後の空気層を 0 番目とし、そこから光線の進む方向とは逆向きに、1 番目から n 番目まで層を定義する。 k 番目の層での屈折率を n_k 、厚みを t_k とすれば、 k 番目の層中で生じる位相差 ϵ_k は、

$$\epsilon_k = 4\pi n_k t_k / \lambda \quad (27)$$

となる。

まず、 $k = 1$ の層を考える。この面での反射率 A は、Appendix A の結果より、

$$A = 1 - T_n \quad (28)$$

$$= 1 - \frac{t_0^2 t_1^2}{1 + r_0^2 r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos \epsilon_1} \quad (29)$$

$$= \frac{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos(\epsilon_1)}{1 + r_0^2 r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos \epsilon_1} \quad (30)$$

$$= \frac{r_0 - r_1 \exp(-i\epsilon_1)}{1 - r_0 r_1 \exp(-i\epsilon_1)} \frac{r_0 - r_1 \exp(i\epsilon_1)}{1 - r_0 r_1 \exp(i\epsilon_1)} \quad (31)$$

$$\equiv |R_1 \exp(i\phi_1)|^2 \quad (32)$$

と書ける。ここで、 $R_1 \exp(i\phi_1)$ は 1 番目の層の反射率を複素数で与えたもので、 R_1 は有効反射係数、 ϕ_1 は有効位相差と呼ぶことにする。この形式で書く事の有用性は、面での反射係数 r と同じ形式をしており、第 1 層全体を反射係数 R_1 、反射の際の位相の変化が ϕ_1 の仮想反射面と見なせることにある。第 1 層を仮想反射面とみなせたことにより、第二層面 ($k = 2$) での反射係数は、上面と下面での反射率がそれぞれ r_2 と $R_1 \exp(i\phi_1)$ である層であると考えられることができるので、一層膜での式を用いる事ができて、

$$R_2 \exp(i\phi_2) = \frac{r_2 - R_1 \exp(i\phi_1) \exp(-i\epsilon_2)}{1 - r_2 R_1 \exp(i\phi_1) \exp(-i\epsilon_2)} \quad (33)$$

となる。これは、第一層と第二層をまとめて仮想反射面としたときの複素反射係数である。以上より、 k 番目の層での有効反射係数は、以下の数列で表現されることがわかる。

$$R_n \exp(i\phi_n) = \frac{r_n - R_{n-1} \exp(i\phi_{n-1}) \exp(-i\epsilon_n)}{1 - r_n R_{n-1} \exp(i\phi_{n-1}) \exp(-i\epsilon_n)} \quad (34)$$

初期値として $\phi_0 = 0$ 、 $R_0 = -r_0$ を採れば、 $k = 1$ から順に有効反射係数を求めていくことができ、 n 層膜の有効反射係数 $R_n \exp(i\phi_n)$ が得られる。仮想面での透過率は、 $T_n = 1 - |R_n \exp(i\phi_n)|^2$ によって得られる。

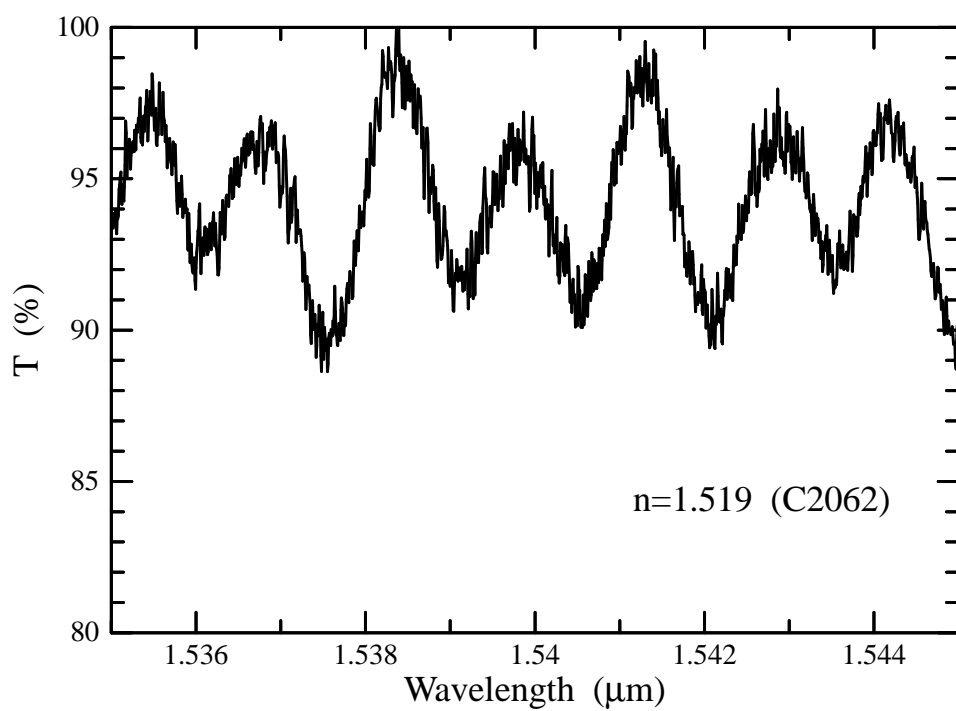
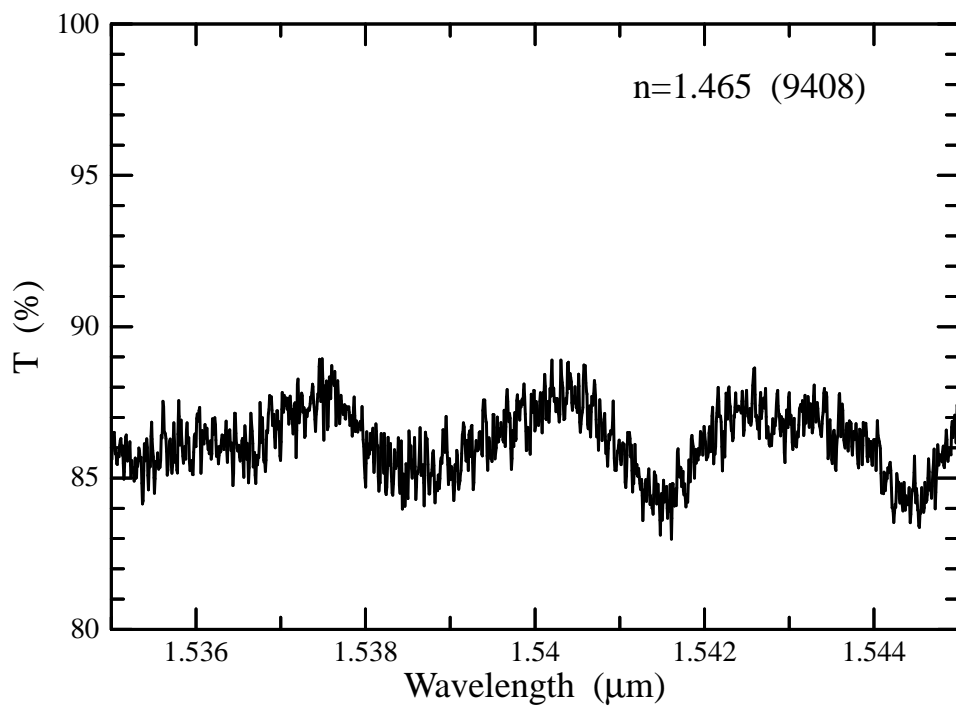


図 2: 透過率の測定結果。いずれのサンプルにも準周期的なリップルが見られる。

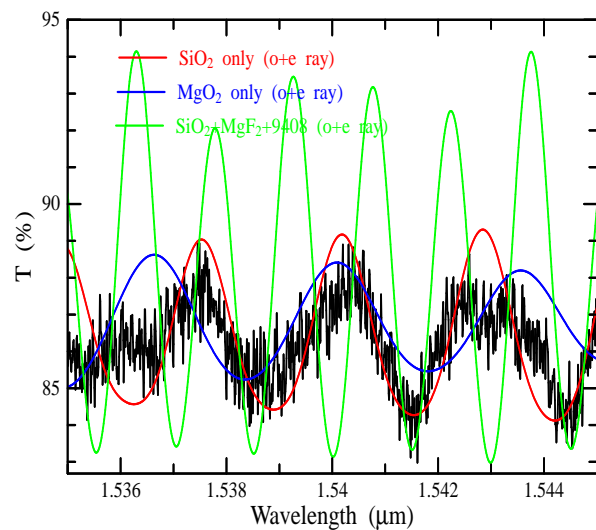


図 3: 多層膜干渉理論の結果と測定値の比較 (9408)。

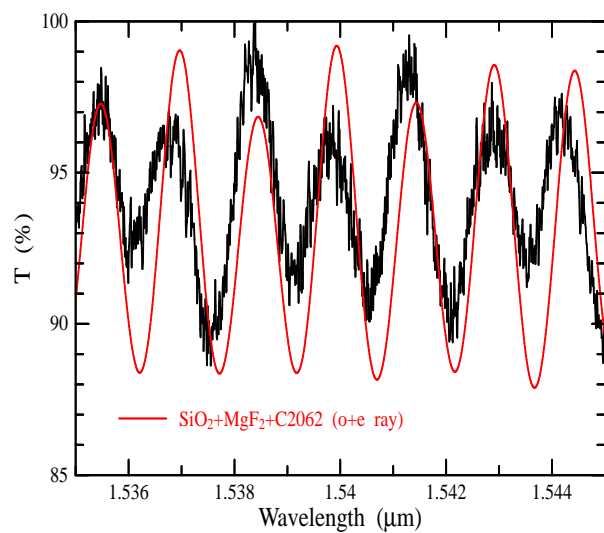


図 4: 多層膜干渉理論の結果と測定値の比較 (C2063)。

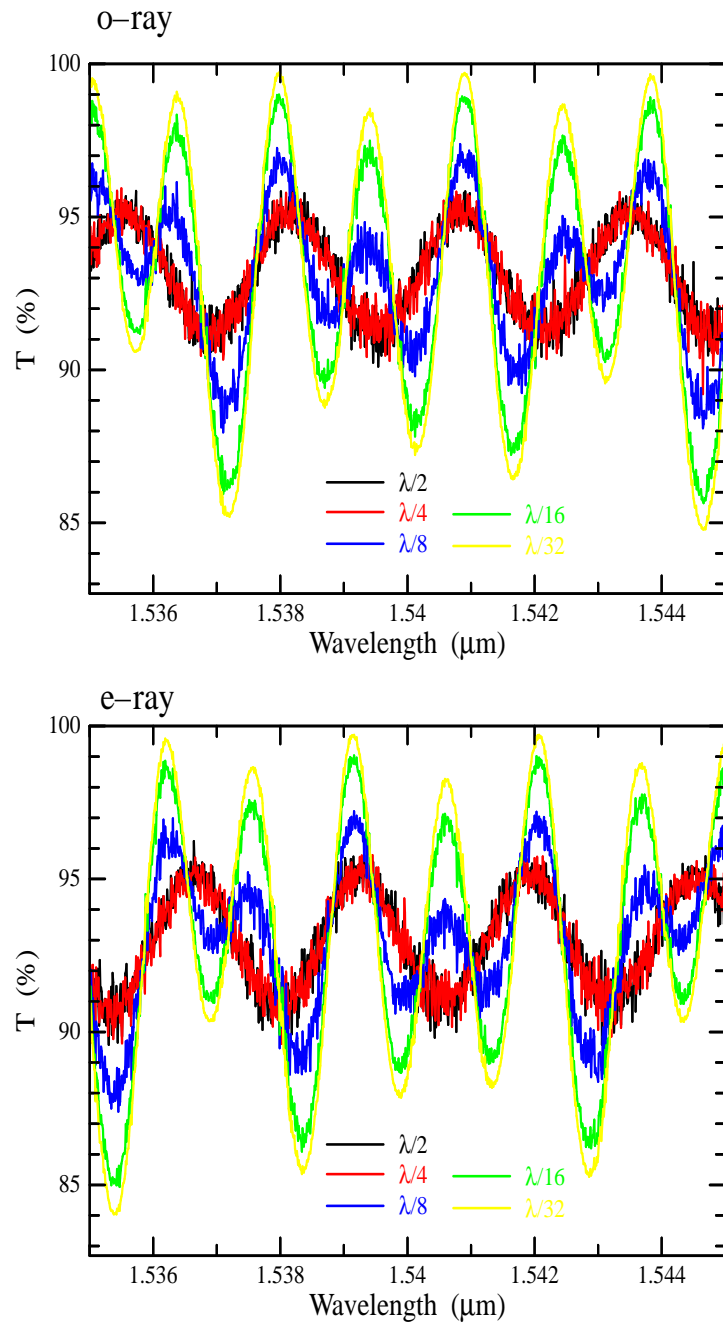


図 5: MgF_2 の両面の面精度の違いによる干渉パターンの変化。

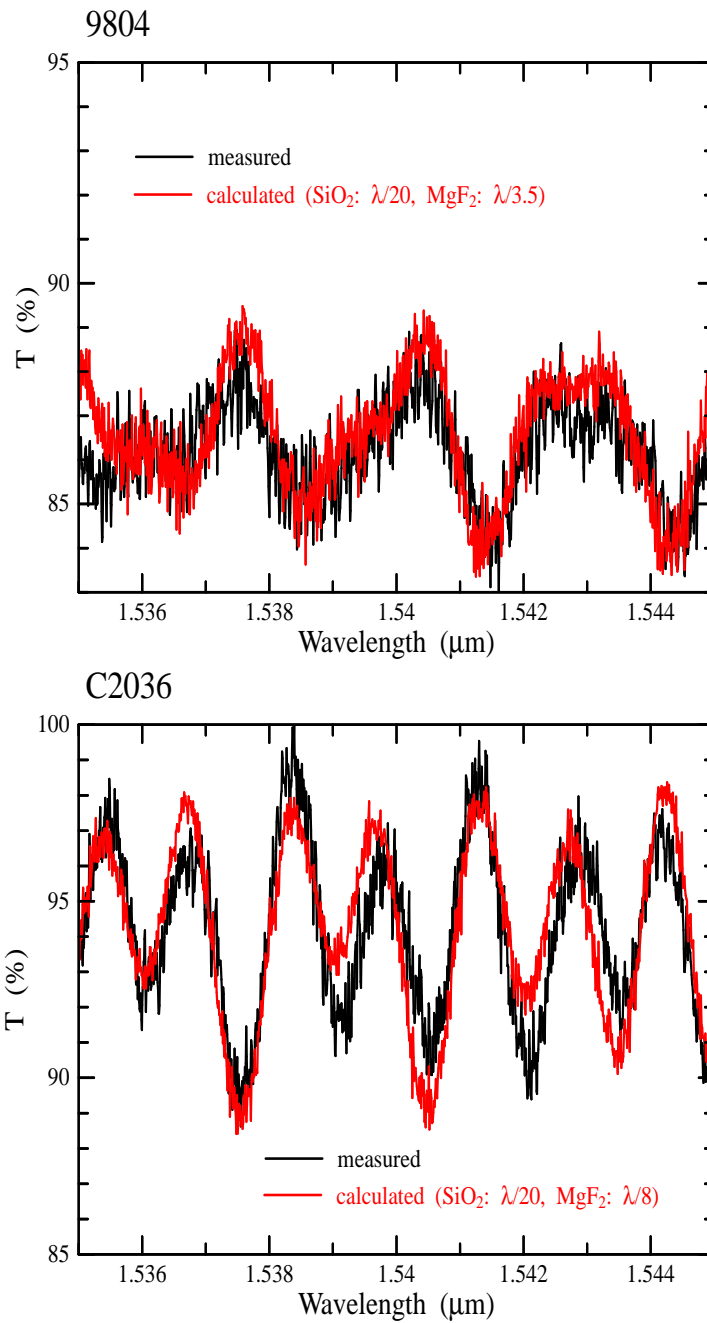


図 6: 測定値と面精度を考慮したモデルとの比較。

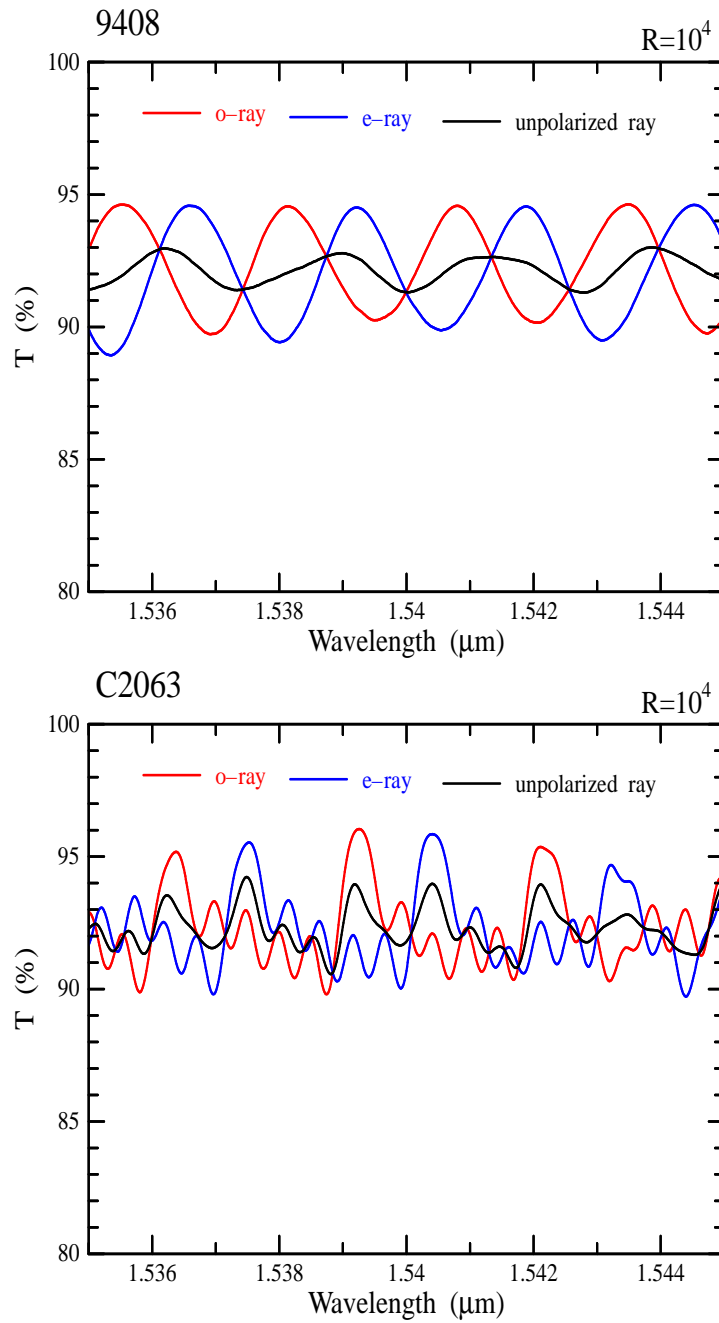


図 7: 無色波長板を用いた場合に予想されるリップルパターン。接着材 9408 を用いた方は、滑らかなパターンのリップルしか生じていない。

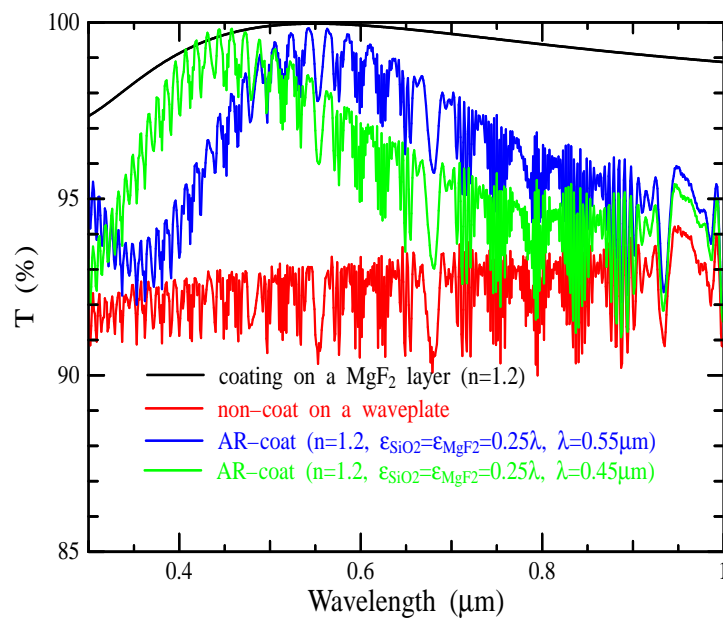


図 8: AR コートによる透過率改善の効果。緑線は $\lambda = 450 \text{ nm}$ に最適化した場合である (他は 550 nm に最適化)。

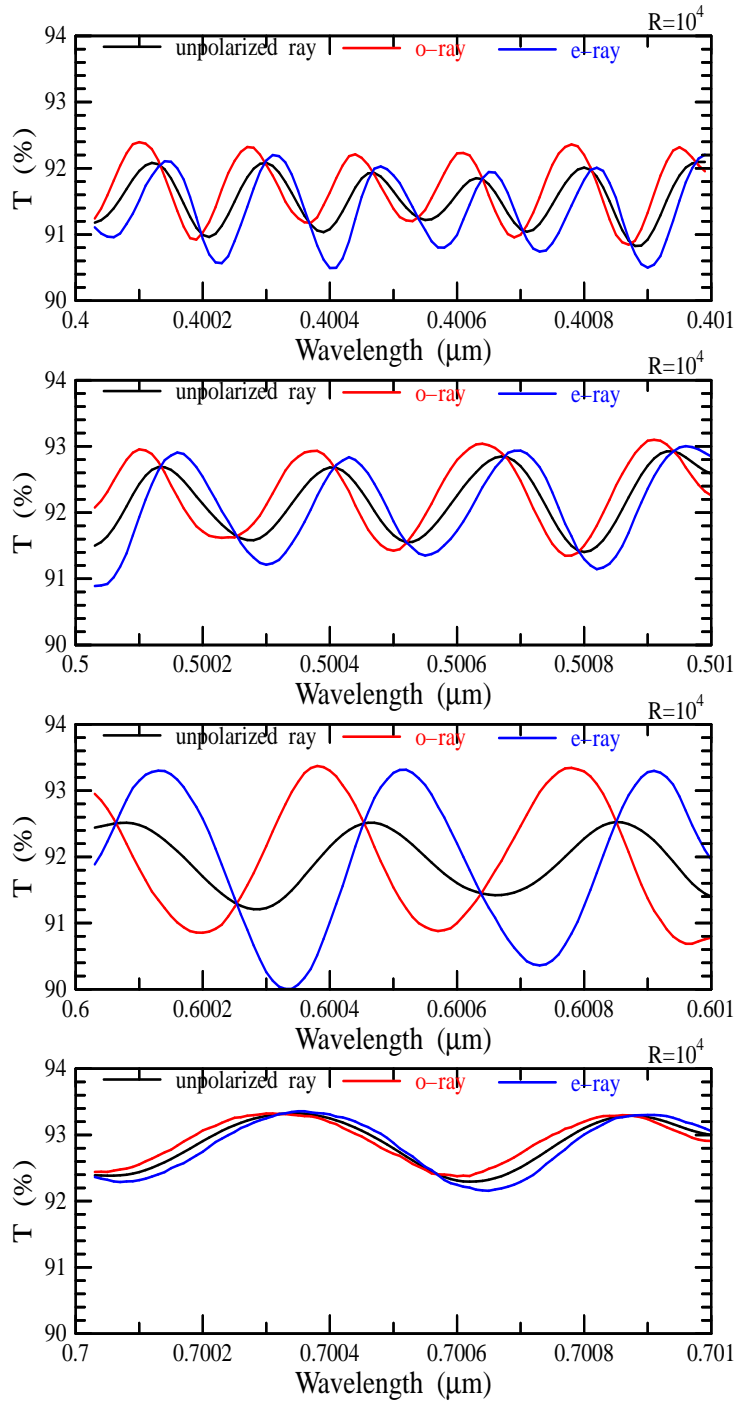


図 9: 可視波長域において予想されるリップル ($R = 10000$)。SiO₂ の面精度は $\lambda/20$ 、MgF₂ の面精度は接着材との界面で $\lambda/3.5$ 、その他で $\lambda/20$ としてある。

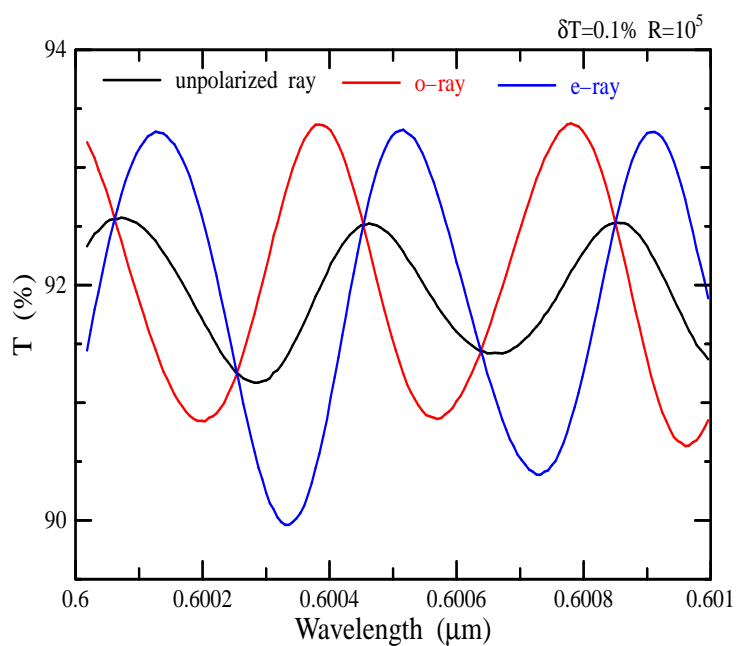


図 10: 可視波長域において予想されるリップル ($R = 100000$)。面精度は図 9 で用いたものと同じ。光子数 10^6 (0.1% の精度) で計算を実行した結果。分解能をあげても細かい周期のリップルは見えてこない。

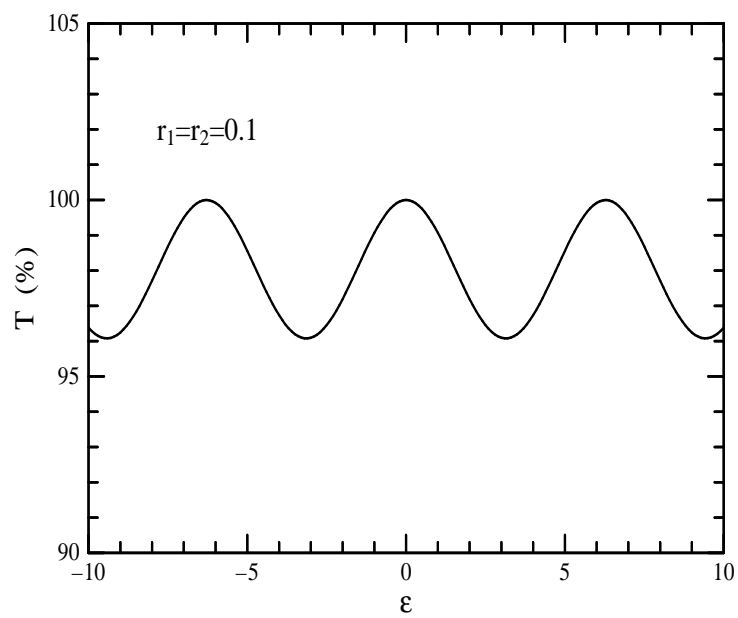


図 11: 透過率 (T) の ϵ に対する振舞。