

きょう体のたわみ量について

池田 優二

2000年3月21日

きょう体を設計する上において、整備のしやすさなど配慮すべき点は多くあるが、その中でも最も大事なものは姿勢差による「たわみ」をいかに小さくするかということである。きょう体がたわむことによる、光学素子や検出器の位置・軸のずれは、取得データの質に直接関わってくるからである。以下、試験用きょう体のたわみ量を計算、および結果からの設計へのフィードバックを行なったので、報告する。

1 準備 (たわみの基本式)

はりのたわみ量は、大きく二つに分類できる。それは、(1) 曲げ応力によるたわみ (Δ_b) と (2) せん断応力によるたわみ (Δ_s) である。全たわみ量 (Δ) は、それら二つの足し合わせで表現される。

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_s \quad (1)$$

1.1 曲げ応力によるたわみ

曲げ応力とは、曲がったはりの内側と外側でそれぞれ圧縮応力と引っ張り応力が発生することによって生じる。したがって、たわみ量 (y) は、縦弾性係数 (= ヤング率) E を用いて以下の微分方程式で表現される。

$$d^2y/dx^2 = -M/EI \quad (2)$$

ここで、 M は曲げモーメント、 I は断面二次モーメントである。また、 x 軸ははりの先を原点として、はりの根本に向かって正とする。

以下で詳しく述べるが、ここで取り扱う問題ははりに「等分荷重」と「端への一点集中荷重」の両方がかかっている場合である。そのとき、はりのある点 ($=x$) にかかる荷重 ($F(x)$) は、

$$F(x) = -wx - W \quad (3)$$

である。ここで、 w ははり単位長さあたりの自重、 W ははりの端に生じる荷重である。 $dM(x)/dx = F(x)$ を用いて、 $M(x)$ を求めそれを式 (2) に代入することによって、たわみ量 (y) を得る。

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{w}{24} x^4 + \frac{W}{6} x^3 + c_1 x + c_2 \right) \quad (4)$$

$$c_1 = -l^2 \left(\frac{w}{6} l + \frac{W}{2} \right) \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{w}{8} l^4 + \frac{w}{3} l^3 \quad (6)$$

l は、はりの長さである。はりが最大にたわむのは $x = 0$ の時であるから、最大たわみ量 y_{\max} として結局、

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}c_2 \quad (7)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{8}l^4 + \frac{W}{3}l^3\right) \quad (8)$$

が得られる。

1.2 せん断応力によるたわみ

長さ dx のはりのせん断応力によるたわみ量 ($d\lambda$) は、以下で表される。

$$d\lambda = -F(x)/AGdx \quad (9)$$

A ははりの断面積、 G は横弾性係数である。

式 (9) を代入し両辺を積分してせん断応力によるたわみ量を求めると、

$$\lambda = \frac{1}{AG}\left(\frac{w}{2}x^2 + Wx + c_3\right) \quad (10)$$

$$c_3 = -\left(\frac{w}{2}l^2 + Wl\right) \quad (11)$$

最大せん断たわみ量 (λ_{\max}) は、

$$\lambda_{\max} = \frac{C_3}{AG} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{AG}\left(\frac{w}{2}l^2 + Wl\right) \quad (13)$$

となる。

1.3 断面二次モーメント

今取り扱うはりの形状は、中身がくり抜かれた四角筒である。したがって、断面のたわみ方向に平行な方向の長さを h 、垂直方向の長さを b 、厚みを t とすると、断面二次モーメントは以下で表現される。

$$I = \frac{1}{12}(bh^3 - (b - 2t)(h - 2t)^3) \quad (14)$$

2 形状のモデル化と仮定

装置は、「較正部」「偏光子部」「分光器部」の3部に分けられる(図1)。簡単のため、それぞれが等厚(= t)の四角筒であるとする。各部の大きさを表1に記す。

さらに、以下の仮定を施す。

1. 各部の接続面は固定端であるとし、ネジ止めの不完全さによるたわみはないとする。
2. きょう体内部の素子による荷重は、はりの端への一点荷重に置き換える。これにより、得られるたわみ量は実際のたわみ量よりも大きなものになっているはずである。

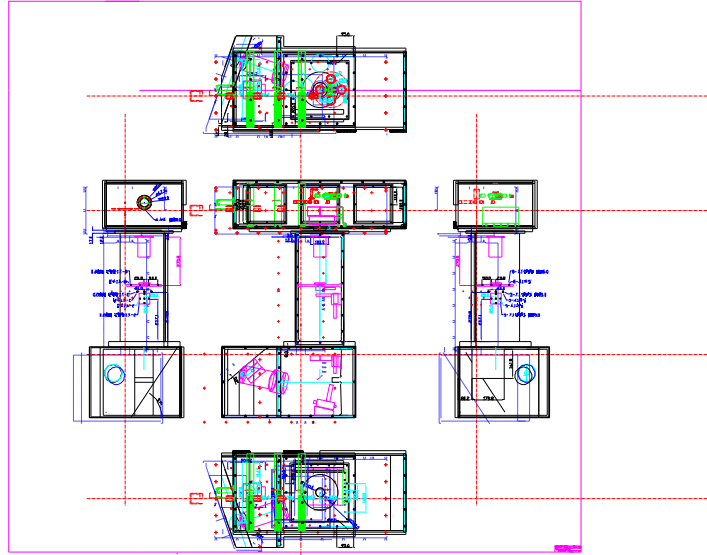


図 1: きょう体の設計図。

	$l(\text{mm})$	$b(\text{mm})$	$h(\text{mm})$
較正部	270	970	470
偏光子部	607	270	270
分光器部	400	270	750

表 1: 各部の外形。 h と b は交換可能だが、ここでは最も構造上弱くなる場合を選んである。

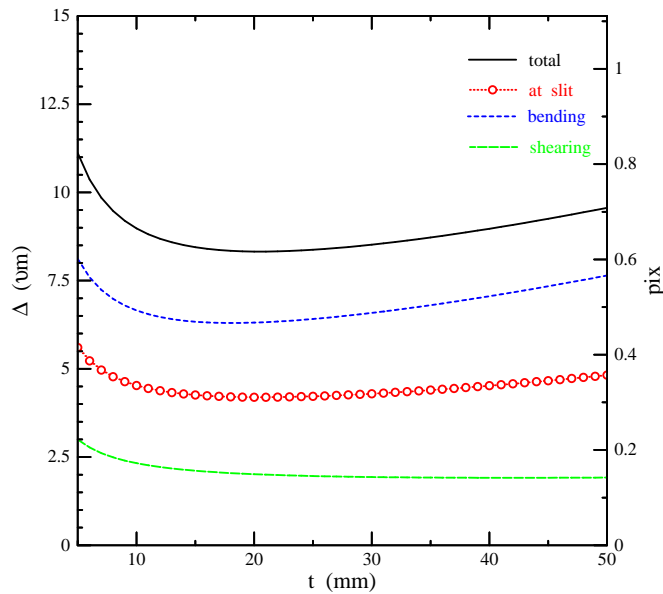


図 2: 厚み (t) に対するたわみ量の変化。せん断応力たわみ (緑線) は、厚みの増加とともに減少するが、曲げ応力たわみ (青線) は極小値をもつ。全たわみ量 (黒実線) としては、曲げ応力たわみが効いているので、全たわみ量も極小値を持つ。

3. 材質はジュラルミンとする ($\rho = 2.8\text{g/cc}$ 、 $E = 72\text{Gpa}$ 、 $G = 27\text{GPa}$)。

以上の仮定から、装置の下端でのたわみ量は、

$$\Delta_{\text{tot}} = \Delta_C + \Delta_P + \Delta_S \quad (15)$$

となる。 Δ_C 、 Δ_P 、 Δ_S はそれぞれ、較正部、偏光子系部、分光器部の曲げ応力たわみとせん断応力たわみを合わせた各部でのたわみ量である。

3 解析結果

3.1 きょう体壁の肉厚の決定

図 2 に、きょう体の厚み (t) を変化させた場合の装置下端でのたわみ量の依存性を示している。一般に、たわみ量は厚みの増加とともに減少するはずだが、その分自重が増加するため、ある極小点をさかいにまた増加傾向になることが予想される。図?でもそのような傾向になっているのが分かる。極小値 ($\Delta = 0.83 \mu\text{m}$) での厚みは 20.5mm である。したがって、きょう体壁の肉厚としてこの付近の値を設定するのが望ましい。

図 3 には、厚みにたいする全重量が記してある。重量は、厚みの増加にしたがって急激に増加する。 $t = 20 \pm 5\text{mm}$ の範囲で、たわみ量は 1.5% しか変化しないのに対して、重量

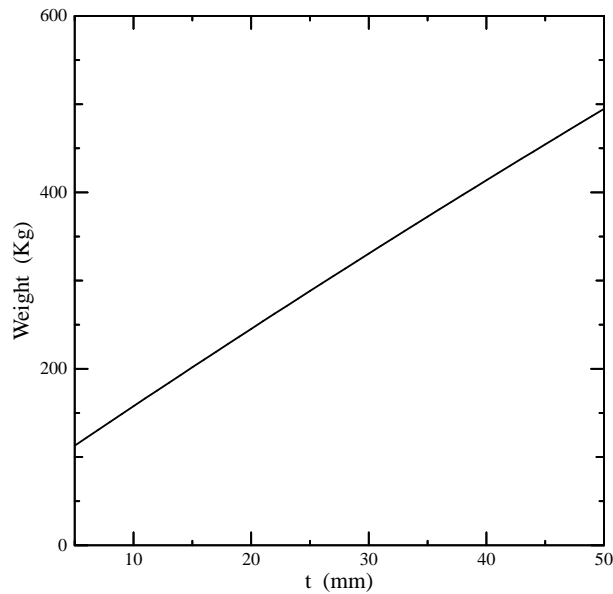


図 3: 厚み (= t) に対する総重量量の変化。

は 20% も変化する。本装置はさまざまなサイトに持ち運びをすることを考慮すると、できるだけ軽量であることが望ましい。したがって、厚みとしては総重量が軽いことを第一に考え、その中でできるだけたわみが小さい解を選べばよいことになる。結果、厚みとして $t = 15\text{mm}$ を採用した。

3.2 偏光子部の外形の変更

全節では全たわみ量の極小値から壁の厚みを決定したわけであるが、その極小値といえども装置下端で $8.4\mu\text{m}$ ものたわみ量がある (図?)。検出器の 1 ピクセルの大きさが $13.5\mu\text{m}$ 、さらに検出器を支える支柱のたわみが数 μm であることを考慮すると、あと半分くらいにまでたわみ量を抑える必要がある。現在取り扱っている構造においては、最もたわみが大きいのは偏光子部である。全体の約 70% 近くを占めている。このことは、 l が長く、 h および b が小さい (つまり非常に細長い) 構造であること (図 1) を考えれば容易に想像できるであろう。

そこで、偏光子部の幹周りをもう少し大きくとることによってたわみ量を抑えることを考える。図?には、偏光子部正方断面の一辺の長さ (h or b) を変化させ、それに呼応して全たわみ量がどれだけ変化するかを示してある。ただし、壁厚は $t = 15\text{mm}$ で固定してある。

図 4 を見ると、偏光子部の幹周りの増加により急激にたわみ量が減少していることがわかる。幹周りを大きくすればするほどたわみは少なくなるが、較正部および分光器部の大きさと兼ね合いから大きさに制限がある。偏光子部が較正部および分光器部からはみ出

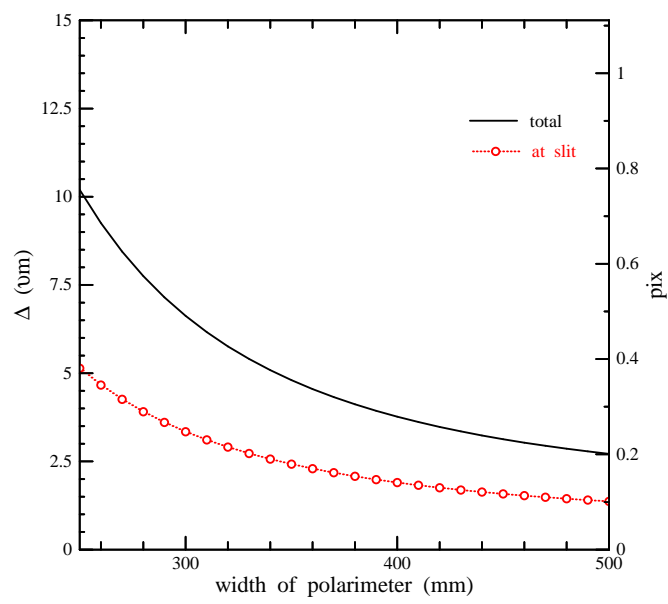


図 4: 偏光子部の外形変化にともなう全たわみ量。実線は装置端での全たわみ量、白丸は分光器スリット像でのたわみ量を表す(本文参照)。

ない限界である、 $b = h = 350\text{mm}$ を外形として採用することにした。この時、装置端での全たわみ量は $4.8\mu\text{m}$ である。このとき分光器スリット上では $2.4\mu\text{m}$ のたわみ量になっている。1 次近似的には、分光器以降のたわみは検出器上での像の位置ずれに影響しないので、スリット上のずれをもって検出器上での位置のずれを見積もっても構わない。スリット像のカメラレンズによる縮小率は、現在の設計では 1.0 倍なので、検出器上での像のずれは最大で $2.4\mu\text{m}(=0.18 \text{ pix})$ ということになる。この程度のたわみであれば、十分安全圏内であろう。

3.3 分光器系のトルクによるねじれ

分光器系は光軸に対して対称形を成していない。したがって、光軸を軸としたトルク ($=T$) が発生し、較正部と偏光子部がねじれて検出器上での像の位置のずれを生じることが考えられる。ここで考えている四角筒のような薄肉閉断面の筒にトルク ($=T$) がかったときのねじれ角 ($=\theta$) は以下のように表される。

$$\theta = \frac{sT}{4A^2tG} \quad (16)$$

s は断面壁中線の周回距離、 A は断面積である。 $t = 15\text{mm}$ 、偏光子系の外形 $b = h = 350\text{mm}$ のときねじれによる検出器上での回転距離は、 $0.59\mu\text{m}$ となる。曲げ応力およびせん断応力によるたわみ量にくらべ非常に小さく、考慮の対象外としてよいことが分かる。

4 まとめ

実験用のきょう体のたわみ量を見積もり、その結果から設計の変更を行なった。最終的な設計およびたわみ量は以下ようになった。

- 外形 970x470x270 mm (較正部)、607x350x350 mm (偏光子部)、970x470x270 mm (分光器部)
- 外壁厚 15mm
- 最大たわみ量 (装置を横倒しにしたとき) $4.8\mu\text{m}$ at 装置端 0.2 pix on 検出器

今回の見積もりでは、螺による連結部を固定端として扱っているためその部分でのたわみは考慮されていない。螺による連結部のたわみ量を見積もるためもはや解析的に解くのは難しく、計算機の手を借りなければならない。今後の課題として、FEM ソフトを用いた綿密なたわみの解析も検討していきたい。