きょう体のたわみ量について その3 — トラス構造についての考察

池田 優二

2000 年 6 月 12 日

1 はじめに

これまでは、きょう体の構造として箱構造を考えて来た (レポート 1、2 を参照)。その結果、十分にたわみ量の小さな構造を構築することができたが、一方で装置の全重量 (250 kg) のうちきょう体が占める割合がそのほとんどになってまうという点において問題点が残った。軽量化の手段として、トラス構造を用いる方法があると言われている。実際にトラス構造がどの程度有効なのかを考察したので、以下に報告する。

2 トラス構造の基礎

2.1 トラス構造とは

大型の構造物を作る際の、軽量化の方法として「骨組み構造」がある。骨組み構造は複数の棒状の部材で構成され、それぞれは接点で連結される。連結の方法には、全く自由度を持たない「剛節」と回転自由度のみをもつ「滑節」がある。滑節による連結部のみから構成される骨組み構造をトラスという[1]。

トラス構造の特徴は、部材に働く応力が軸力のみ (引っ張り応力と圧縮応力) であることである。接点に回転自由度を持っているため、モーメント (曲げ応力) が生じない。したがって、変移量 $= \delta_{\max}$ は部材の長さ $(= l)$ に比例し、断面積 $(= A)$ に反比例する。

$$\delta_{\max} \propto l/A \tag{1}$$

2.2 静定問題と不静定問題

系がトラス構造であるとき、系全体支点の数 $(= s)$ と未知反力の数 $(= S)$ は以下の式で結ばれる。

$$S = 2s \tag{2}$$

また、未知内力の数 $(= M)$ は部材数 (=m) によって決まる。

$$M = m \tag{3}$$

[1]剛節を含むものは「ラーメン」と呼ばれる

つりあいの式の数 $(=J)$ は接点数 $(=j)$ によって決まり、

$$J = 2j \tag{4}$$

である。

$S + M \geq J$ であれば、系は部材と接点の数が十分であることになり、系は安定する。そのうち $S + M = J$ である場合を、「静定問題」という。このときはつりあいの式数と未知数が同じであるので、つりあいの式のみで未知量を導くことが可能である。$S + M > J$ である場合は「不静定問題」といい、これを解く場合は有限要素法の基礎であるマトリックス法などを使用しなければならない。

3 三角トラスによるたわみ量解析

3.1 一つ三角トラスに荷重が生じる場合

今、最も簡単なトラスの例として図 1 のような系を考える。2 本の部材から成り、それらの一方が望遠鏡のバックフォーカス面に滑節によって固定されており、また他方はお互い滑節によって連結されている。トラスに働く外力は装置の重量による重力 $(= F)$ で、これは接点 1(=連結点) にのみかかっているとしてよい。部材が連結点に作る角度を θ とし、また重力の x 軸方向の成分を P、y 軸方向の成分を Q とすると接点 1 での力のつりあいの式は以下のようになる。

$$N_{12}\cos(\frac{\theta}{2}) + N_{13}\cos(\frac{\theta}{2}) + P = 0 \tag{5}$$

$$N_{12}\sin(\frac{\theta}{2}) - N_{13}\sin(\frac{\theta}{2}) + Q = 0 \tag{6}$$

ここで、N_{12} および N_{13} は接点 1-2、1-3 間に働く軸力である。上式より N_{12} と N_{13} が得られる。

$$N_{12} = -\frac{P\sin(\frac{\theta}{2}) + Q\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\theta)} \tag{7}$$

$$N_{13} = \frac{Q\cos(\frac{\theta}{2}) - P\sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\theta)} \tag{8}$$

系全体のひずみエネルギー $(= U)$ は、

$$U = \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{2A_i E_i} \tag{9}$$

であるので、カスティリアノの定理を用いて、x 方向および y 方向の変移量 δ_x、δ_y が得られる。

$$\delta_x = \partial U/\partial P = \frac{2lF}{AE}\left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\theta)}\right)^2 \cos\phi \tag{10}$$

$$\delta_y = \partial U/\partial Q = \frac{2lF}{AE}\left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\theta)}\right)^2 \sin\phi \tag{11}$$

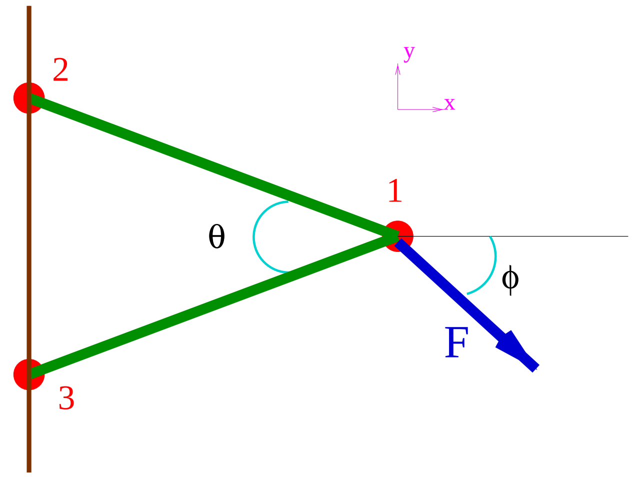

図 1: 一つの三角トラスの例。部材数は $s = 2$、支点数は $m = 2$、接点数は $j = 3$ であり、これは静定問題として扱える。

ϕ は望遠鏡の天頂距離である。

図 2,3 に、$l = 2$ m、$A = 0.05^2\pi$ m^2(直径 0.1 m) のジェラルミンポールを部材として用い、接点に 50 kgf の荷重をかけた場合の x 方向と y 方向の変移量を示してある。まず、一目して分かるのは x 成分の変移量は y 成分の変移量に比べて問題にならない程度でしかないということである。y 成分の変移量は、天頂距離が大きくなるにつれて、また部材間の角度が減少するにつれて増加するが、極端な場合を除いて変移量は 10 μm 以下に収まっている。例ではジュラルミンを用いているが、ステンレス ($E = 20e10$ N m^{-2}) を用いた場合は変移量はさらに 1/3 程度になる。

3.2 複数の三角トラスの場合

前節では一つの三角トラスの場合を考えたが、ここではトラスが複数個になった場合を考えて見たい。まず、y 軸方向に並列にならんだ場合を考える。このときは、各接点にかかる外力の x 軸方向成分 ($= P$) は両接点に等分される。したがって、変移量は半分になると考えられる (式を参照)。一方、y 軸方向成分 ($= Q$) は一方の接点のみに偏って現れることになり、y 軸方向の変移はトラスが一つの場合と変わらない。変移量としては、y 軸方向のものが x 軸方向に比較してより効いていたので、y 軸方向に並列に並べても全体の変移量 (=δ) を減じる効果はほとんどないと言える。

次に、z 軸方向に並列に並べた場合を考える。このときは、外力は x 軸方向に対しても y 軸方向に対しても各接点に等分されるしたがって、両成分に対して変移量は半分になる。

以上のことを実際の場合にあてはめると、装置が載せられた常盤をトラス構造によって支える場合には接点の変移量のみを問題にする場合には、各辺に一つずつ三角トラスをおけばよいことになる。向かい合った三角トラスの接点にそれぞれ常盤と装置の重量の半分が外力として生じる。

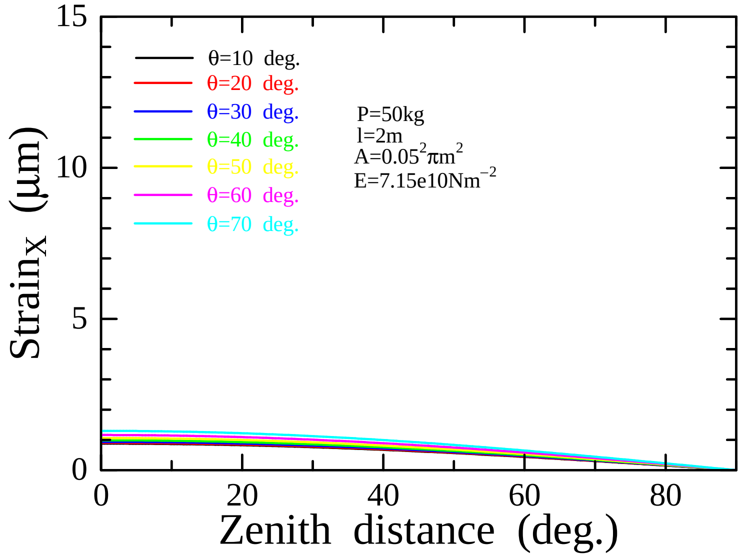

図 2: 天頂角の変化にともなうたわみ量の x 変移 (δ_x)。曲線の違いは、部材の成す角 (θ) の違いに対応。部材はジュラルミンで、$l = 2.0$ m、$A = 0.05^2\pi$ m^2。接点には、50 kgf の外力が生じているとしている。

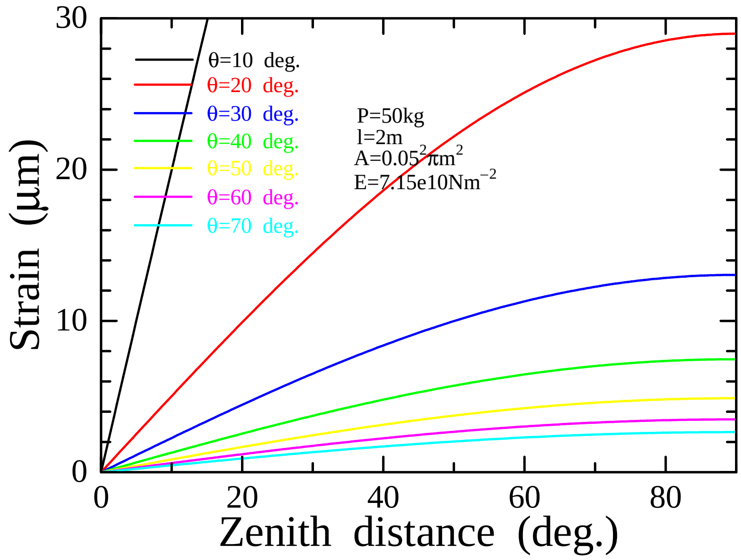

図 3: 天頂角の変化にともなうたわみ量の y 変移 (δ_y)。x 変移に比べて非常に大きいことが分かる。

3.3 トラスの重量

トラス構造を用いれば、装置のたわみ量 (変移量) を小さく押えられる可能性あることが分かった。しかしながら、トラス構造を成す部材は重量を持っており、もしその重量が装置の重量を大きく超えてしまうといくらたわみ量が小さくとも装置としては非常にバランスの悪いものであると言わざるを得ない。図 4-7 に、たわみ量を固定した場合 ($\delta_y = 10\ \mu$m @天頂距離 60 度) の断面積 (A) と部材の長さ (l) を装置と常盤を合わせた重量が 60 kg、40 kg、20 kg の場合について示してある。部材には、ステンレスを用いてある。

部材の長さは、装置の全長を考えると最短でも 1.5 m である。部材長が長くなるにつれて重量は大きくなるので、部材長が 1.5 m のときが最も部材が軽くなると考えてよい。また、断面積も部材の重量を大きく聞いてくる要因であるが、図 4-7 を見ると部材長をある値に固定した場合、θ が大きくなるほど断面積が小さくなることがわかる。部材の重量は l と A に比例するので、部材の最軽量値は $l = 1.5$ m で $\theta = 60$ 度の場合のときになる。その値は、装置重量が 60 Kg、40 kg のときで、それぞれ 44.2 kg、29.8 kg と非常に大きな重量になる。装置を支えるには最低でも 8 本の部材が必要であり、したがってトラス全体の重量は最低でも 238.4 kg 必要であることが分かる。これは、箱構造によってきょう体を構築した場合と同等もしくはそれ以上の重量である。部材の重量を小さくする手段として、(a) 装置の重量をさらに軽くする、(b) 部材を軽い素材にする手段が考えられるが、(a) についてはほぼ不可能であり、(b) についてはたとえば部材としてジュラルミンを用いた場合を考えても、密度が約 1/3 になる変わりにヤング率も約 1/3 になってしまい、結果として必要な部材の断面積が増加し (3 倍になり)、結果は大きく変わらない。

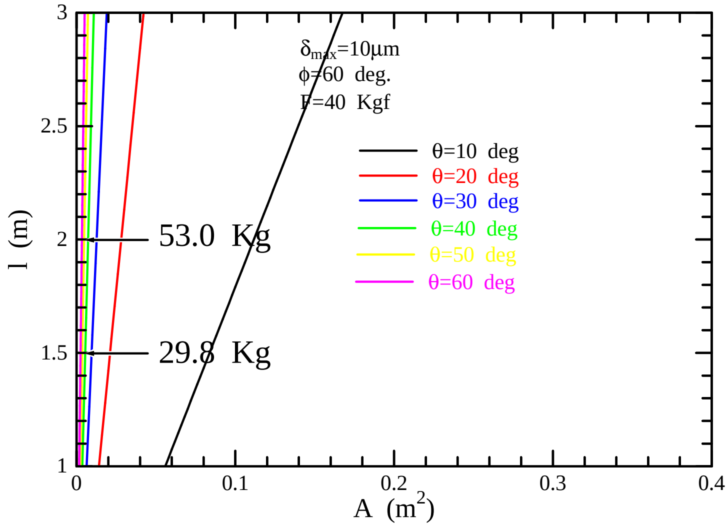

図 4: $\delta_y = 10.0\ \mu$m とした場合の、A と l の関係 ($F = 40$ kgf)。矢印の数字は $\theta = 60$ 度の場合における、$l = 1.5$ m、$l = 2.0$ m の場合の部材一本の重量である。

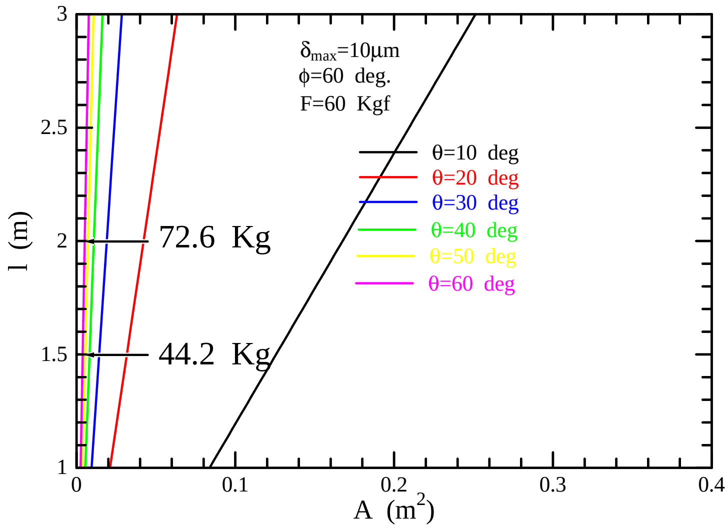

図 5: $\delta_y = 10.0\ \mu$m とした場合の、A と l の関係 ($F = 60$ kgf)。矢印の数字は $\theta = 60$ 度の場合における、$l = 1.5$ m、$l = 2.0$ m の場合の部材一本の重量である。

したがって、トラス構造を用いた場合にも箱構造に比較して、軽量化に大きな貢献はないと言わざるを得ない。

4 まとめ

我々の開発する装置のきょう体をトラス構造によって支える場合のたわみ量について考察した。結果として、トラス構造によって 10 μm 程度までたわみ量が押えられることが分かったが、箱構造に比べて、有意に軽量化が図れるわけではないことが分かった。ただ、同じ重量としても分解が用意で、したがって持ち運びには比較的便利であることは付け加えておかなければならないだろう。

以上。